Научная статья

УДК 517.958
DOI 10.25205/1560-750X-2024-27-1-139-162

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В ОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ

Журабек Шакарович Сафаров[1]
Дурдимурод Каландарович Дурдиев[2]
Аскар Ахмадович Рахмонов[3]

[1,2,3] Институт Математики имени В. И. Романовского АН Республики Узбекистан
100174, г.Ташкент, Узбекистан

[2] Ташкентский университет информационных технологий,
100184, Ташкент, Узбекистан
j.safarov65@mail.ru
durdiev65@mail.ru, d.durdiev@mathinst.uz
araxmonov@mail.ru

Аннотация

Рассматривается обратная задача определения ядра интегрального члена интегро-дифференциального уравнения гиперболического типа. Задача определения ядра памяти в волновом процессе сводится к нелинейному интегральному уравнению Вольтерра первого рода типа свертки, которое, в свою очередь, при определенных предположениях преобразуется к уравнению Вольтерра второго рода. Методом сжимающих отображений доказывается однозначная разрешимость поставленной задачи в пространстве непрерывных функций с весовыми нормами, а также получена оценка условной устойчивости решения.

Ключевые слова и фразы

интегро-дифференциальное уравнение, обратная задача, ядро, спектральная задача, теорема Банаха, неравенство Гроноулла.

Для цитирования

Сафаров Ж. Ш., Дурдиев Д. К., Рахмонов А. А., Обратная задача для гиперболического интегро-дифференциального уравнения в ограниченной области // Математические труды, 2024, Том 27, № 1, С.139-162. DOI 10.25205/1560-750X-2024-27-1-139-162

INVERSE PROBLEM FOR A HYPERBOLIC INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATION IN A BOUNDED DOMAIN

Jurabek Sh. Safarov[1], **Durdimurod K. Durdiev**[2], **Askar A. Rakhmonov**[3]

[1,2,3] Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan, 100174, Tashkent, Uzbekistan

[2]Tashkent University of Information Technologies, 100084, Tashkent, Uzbekistan

j.safarov65@mail.ru,durdiev65@mail.ru, d.durdiev@mathinst.uz,araxmonov@mail.ru

Abstract

In this paper, we consider the inverse problem of determining the kernel of an integral term in an integro-differential equation. The problem of determining the memory kernel in the wave process is reduced to a nonlinear Volterra integral equation of the first kind of convolution type, then over determination condition it brings to the Volterra integral equation of the second kind. The method of contraction maps proves the unique solvability of the problem in the space of continuous functions with weight norms, and an estimate of the conditional stability of the solution is obtained.

Keywords

integro-differential equation, inverse problem, kernel, spectral problem, fixed point theorem, Gronwall inequality..

For citation

Safarov J. Sh., Durdiev D. K., Rakhmonov A. A. Inverse problem for a hyperbolic integro-differential equation in a bounded domain // Mat. trudy, 2024, vol. 27, no. 1, pp. 139-162. DOI 10.25205/1560-750X-2024-27-1-139-162

§ 1. Введение и постановка задачи

Обратные задачи для интегро - дифференциальных уравнений гиперболического типа — бурно развивающееся в настоящее время направление современной математической физики. Такие задачи возникают во многих областях прикладной науки, таких как электродинамика, акустика, квантовая теория рассеяния, геофизика астрономия и др. К интегро - дифференциальным уравнениям приводят задачи распространения упругих, электромагнитных волн в средах, где состояние среды в данный момент времени зависит от ее состояния во все предыдущие моменты времени.

ISSN 1560-750X
Математические труды, 2024, Том 27, № 1, С.139-162
Mat. trudy, 2024, vol. 27, no. 1, pp. 139-162

Математически, в правые части соответствующих классических уравнений распространения волн добавляются интегралы типа свертки, которые описывают явление запаздывания.

С различными постановками обратных задач для уравнений в частных производных второго порядка можно ознакомиться в книгах [1, 2, 3, 4, 5, 6](см. также обширную библиографию в них).

Первые результаты в теории обратных задач для интегро - дифференциальных уравнений представлены в работах итальянских математиков А. Лоренци, Е. Синестрари, Е. Папарони [7, 8, 9]. К настоящему времени изучение одномерных и многомерных обратных задач определения ядра интегрального члена интегро - дифференциальных уравнений стало объектом исследования многих ученых. В [10, 11, 12, 13, 14] рассматривались одномерные задачи нахождения ядра, входящего в интегро - дифференциальное уравнение с дельта-функцией в правой части, либо с граничным условием. Для поставленных в этих работах задач доказаны теоремы существования, единственности и получены оценки устойчивости на основе принципа сжимающих отображений. Подобные задачи с распределенными источниками возмущений изучены в [15, 16, 17]. В работах [18, 19, 20] для многомерных обратных задач нахождения ядра гиперболических интегро-дифференциальных уравнений второго порядка доказаны теоремы однозначной локальной разрешимости в классе функций, аналитических по пространственным и непрерывных по временной переменным. В работах [21, 22] доказаны теоремы о глобальной однозначной разрешимости двумерных обратных задач, когда ядро интегрального члена слабо зависит от горизонтальной переменной. Глобальная однозначная разрешимость многомерной обратной задачи определения ядра доказана в работе [23].

В данной работе исследуется обратная задача, заключающаяся в нахождении решения и одномерного ядра свертки интегрального члена неоднородного интегро – дифференциального уравнения с гиперболическим оператором общего типа в главной части, из условий, составляющих прямую (в данном случае начально - краевую) задачу и некоторого дополнительного условия. В качестве последнего условия рассматривается след решения прямой задачи в фиксированной точке n- мерной области для всего временного интервала. Основными результатами данной работы являются теоремы глобальной однозначной разрешимости обратной задачи и устойчивости решения. Следует отметить, что методика исследования прямой задачи данной работы близка технике, примененной в работе [24], в которой исследуется обратные задачи по определению ядер памяти в интегро-дифференциальном параболическом уравнении.

Рассмотрим интегро-дифференциальное уравнение

$$u_{tt} - Lu = \int_0^t k(t-\theta)u(x,\theta)\,d\theta + g(x,t), \quad (x,t) \in Q, \tag{1}$$

с начальными

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x), \quad x \in \overline{\Omega}, \tag{2}$$

и граничным условиями:

$$u(x,t) = 0, \qquad (x,t) \in \partial Q. \tag{3}$$

где $L = \sum\limits_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial}{\partial x_j}\right) + c(x)-$ равномерный эллиптический оператор $(n \geq 1)$, с $(a_{ij}(x) \in C^1(\Omega),\ c(x) \in C(\Omega);\ \ Q := \Omega \times (0,T],\ \ \Omega \subset \mathbb{R}^n-$ ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega$, а $\partial Q := \partial\Omega \times [0,T]$, $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и $g(x,t)-$ заданные функции. Нахождение функции $u(x,t)$ из (1)–(3), при известной $k(t)$ назовем прямой задачей. В частности, при $k(t) \equiv 0$ необходимыми условиями существования классического решения задачи (1)–(3) являются следующие условия гладкости ([25], с. 483):

$$\varphi(x) \in C^1(\overline{\Omega}) \quad \psi(x) \in C(\overline{\Omega}),\ \ g(x,t) \in C(\overline{Q}),$$

и условие согласование

$$\varphi|_{x\in\partial\Omega} = \psi|_{x\in\partial\Omega} = 0.$$

Обратная задача заключается в определении неизвестного ядра $k(t)$, $t > 0$, по имеющиеся дополнительной информации о решении прямой задачи в некоторой точке $x_0 \in \Omega$,

$$u(x_0,t) = h(t), \qquad 0 \leq t \leq T, \tag{4}$$

где $h(t) - =$ заданная функция.

Определение. *Решением* обратной задачи (1)–(4) назовем функции $u(x,t)$ и $k(t)$ из классов $C^2\big(Q\big) \cap C^1\big(\overline{Q}\big)$ и $C[0,T]$, соответственно, удовлетворяющие соотношениям (1)– (4).

Сначала изучим прямую задачу.

§ 2. Исследование прямой задачи

Рассмотрим спектральную задачу

$$Lv + \lambda^2 v = 0,\ \ x \in \Omega, \tag{5}$$

ISSN 1560-750X
Математические труды, 2024, Том 27, № 1, С.139-162
Mat. trudy, 2024, vol. 27, no. 1, pp. 139-162

$$v\big|_{\partial\Omega} = 0. \tag{6}$$

Известно (см. например, [26], с. 100), что, если коэффициенты оператора L и граница области Ω являются достаточно гладкими и $c(x) > 0$, то спектральная задача (5)–(6) имеет полное в $L_2(\Omega)$ множество ортонормированных собственных функций $v_m(x), m \geq 1$, и счетное множество положительных собственных значений λ_m.

Решение задачи (1)–(3) будем искать в виде ряда Фурье

$$u(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m(t) v_m(x), \tag{7}$$

где $v_m(x)-$ собственные функции задачи (5)-(6); $A_m(t)-$ коэффициенты Фурье определяемые формулой

$$A_m(t) = \int_{\Omega} u(x,t) v_m(x) dx. \tag{8}$$

Подставляя (7) в уравнения (1), (2), относительно $A_m(t)$, получим следующую задачу:

$$A''_m(t) + \lambda_m^2 A_m(t) - \int_0^t k(t-\theta) A_m(\theta)\, d\theta = g_m(t), \tag{9}$$

$$A_m(0) = \varphi_m, \quad A'_m(0) = \psi_m. \tag{10}$$

где φ_m, ψ_m, $g_m(t)$, коэффициенты Фурье функций $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $g(x,t)$:

$$\varphi(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_m v_m(x), \;\; \psi(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \psi_m v_m(x), \;\; g(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} g_m(t) v_m(x). \tag{11}$$

Уравнение (9) эквивалентно следующему интегральному уравнению:

$$A_m(t) = \frac{1}{\lambda_m} \int_0^t \sin \lambda_m (t-s) G_m(s) ds + \left(C_m \cos \lambda_m t + D_m \sin \lambda_m t\right), \tag{12}$$

где

$$G_m(t) := g_m(t) + \int_0^t k(t-\theta) A_m(\theta)\, d\theta, \tag{13}$$

а C_m и D_m- произвольные постоянные. Используя начальные условия (2), из формулы (12) получим

$$A_m(0) = C_m, \quad A'_m(0) = \lambda_m D_m. \tag{14}$$

Из формул (10) и (14) следует, что $C_m = \varphi_m,\quad D_m = \frac{1}{\lambda_m}\psi_m$. С учетом этого (12) записывается в виде:

$$A_m(t) = \varphi_m \cos\lambda_m t + \frac{1}{\lambda_m}\psi_m \sin\lambda_m t + \frac{1}{\lambda_m}\int_0^t \sin\lambda_m(t-s)G_m(s)ds. \qquad (15)$$

Таким образом, мы получили интегральное уравнение вольтерровского типа второго рода относительно функции $A_m(t)$. Из теории интегральных уравнений следует, решение этого уравнения единственно и может быть получено методом последовательных приближений.

Для дальнейших исследований нам нужна следующая лемма:

Лемма 1. *Пусть* $A_m(t)$, $A_m^1(t)$, $A_m^2(t)-$ *решения уравнения (15), соответствующие функциям* $k(t)$, $k^1(t)$, $k^2(t)$. *Имеют места следующие оценки:*

$$|A_m(t)| \leq \left(|\varphi_m| + \frac{1}{\lambda_m}|\psi_m| + \frac{1}{\lambda_m}\|g_m\|T\right) e^{\frac{\|k\|T^2}{2\lambda_m}}, \qquad (16)$$

$$|A_m''(t)| \leq \left(|\varphi_m| + \frac{1}{\lambda_m}|\psi_m| + \frac{1}{\lambda_m}\|g_m\|T\right)\left(\lambda_m^2 + \|k\|T\left(1+\frac{T}{2}\lambda_m\right)e^{\frac{\|k\|T^2}{2\lambda_m}}\right), \qquad (17)$$

$$|A_m^1(t) - A_m^2(t)| \leq \frac{1}{\lambda_m}\left(|\varphi_m| + \frac{1}{\lambda_m}|\psi_m| + \frac{1}{\lambda_m}\|g_m\|T\right)e^{\frac{(\|k^2\|+\|k^1\|)T^2}{2\lambda_1}}\frac{T^2}{2}\|k^1 - k^2\| \qquad (18)$$

где $\|g_m\| = \max\limits_{0\leq t\leq T}|g_m(t)|, \quad \|k\| = \max\limits_{0\leq t\leq T}|k(t)|$.

Доказательство. Из формулы (15) следует,что

$$|A_m(t)| = \left|\varphi_m \cos\lambda_m t + \frac{1}{\lambda_m}\psi_m \sin\lambda_m t + \frac{1}{\lambda_m}\int_0^t \sin\lambda_m(t-s)G_m(s)ds\right|$$

$$\leq |\varphi_m| + \frac{1}{\lambda_m}|\psi_m| + \frac{1}{\lambda_m}\left|\int_0^t \sin\lambda_m(t-s)\left[g_m(s) + \int_0^s k(s-\theta)A_m(\theta)\,d\theta\right](s)ds\right|$$

$$\leq |\varphi_m| + \frac{1}{\lambda_m}|\psi_m| + \frac{1}{\lambda_m}\|g_m\|T + \frac{\|k\|}{\lambda_m}\int_0^t (t-\theta)|A_m(\theta)|d\theta.$$

Отсюда по лемме Гроноулла получим оценку (16). Продифференцировав уравнение (15) два раза по t, воспользовавшись оценкой (16), получим оценку (17).

По условию леммы $A_m^1(t)$, $A_m^2(t)-$ два решения уравнения (15), соответствующие функциям $k^1(t)$, $k^2(t)$. Рассмотрим модуль разности этих функций

$$|A_m^1(t) - A_m^2(t)| \leq$$

$$\left|\frac{1}{\lambda_m}\int_0^t \sin\lambda_m(t-\alpha)\int_0^\alpha \left[k^1(\tau)A_m^1(\alpha-\tau)-k^2(\tau)A_m^2(\alpha-\tau)\right]d\tau\, d\alpha\right|$$

$$\leq \frac{1}{\lambda_m}\int_0^t |\sin\lambda_m(t-\alpha)|$$

$$\int_0^\alpha \left[\left|k^1(\tau)\right|\left|A_m^1(\alpha-\tau)-A_m^2(\alpha-\tau)\right|+\left|A_m^2(\alpha-\tau)\right|\left|k^1(\tau)-k^2(\tau)\right|\right]d\tau\, d\alpha$$

$$\leq \frac{1}{\lambda_m}\int_0^t |\sin\lambda_m(t-\alpha)|\int_0^\alpha \left|A_m^2(\alpha-\tau)\right|\left|k^1(\tau)-k^2(\tau)\right|d\tau\, d\alpha+$$

$$+\frac{1}{\lambda_m}\int_0^t |\sin\lambda_m(t-\alpha)|\int_0^\alpha \left|k^1(\tau)\right|\left|A_m^1(\alpha-\tau)-A_m^2(\alpha-\tau)\right|d\tau\, d\alpha. \qquad (19)$$

Здесь мы использовали очевидное неравенство

$$|\varphi_k^1\varphi_s^1-\varphi_k^2\varphi_s^2|\leq|\varphi_k^1-\varphi_k^2||\varphi_s^1|+|\varphi_k^2||\varphi_s^1-\varphi_s^2|. \qquad (20)$$

Правая часть неравенство (19) состоит из двух слагаемых. Каждое слагаемое оцениваем по отдельности. Для оценки первого слагаемого воспользуемся формулой (16):

$$\frac{1}{\lambda_m}\int_0^t |\sin\lambda_m(t-\alpha)|\int_0^\alpha \left|A_m^2(\alpha-\tau)\right|\left|k^1(\tau)-k^2(\tau)\right|d\tau\, d\alpha$$

$$\leq \frac{1}{\lambda_m}\frac{T^2}{2}\left(|\varphi_m|+\frac{1}{\lambda_m}|\psi_m|+\frac{1}{\lambda_m}\|g_m\|T\right)e^{\frac{\|k\|T^2}{2\lambda_m}}\|k^1-k^2\|, \qquad (21)$$

где $\|g_m\|=\max\limits_{0\leq t\leq T}|g_m(t)|$, $\|k^1-k^2\|=\max\limits_{0\leq t\leq T}|k^1(t)-k^2(t)|$.

Для оценки второго слагаемого (19), меняя порядок интегрирования, получим

$$\frac{1}{\lambda_m}\int_0^t |\sin\lambda_m(t-\alpha)|\int_0^\alpha \left|k^1(\tau)\right|\left|A_m^1(\alpha-\tau)-A_m^2(\alpha-\tau)\right|d\tau\, d\alpha$$

$$\leq \frac{1}{\lambda_m}\int_0^t \left|A_m^1(\tau)-A_m^2(\tau)\right|\int_\tau^t \left|k^1(\alpha-\tau)\right|d\alpha\, d\tau=$$

$$=\frac{1}{\lambda_m}\int_0^t \left|A_m^1(\tau)-A_m^2(\tau)\right|k_1(\tau-t)\,d\tau, \qquad (22)$$

где $k_1(t)=\int_0^t|k^1(\alpha)|\,d\alpha$.

Подставляя (21) и (22) в (19) находим,

$$|A_m^1(t)-A_m^2(t)|\leq$$

$$\leq \frac{1}{\lambda_m}(\frac{T^2}{2}\left(|\varphi_m|+\frac{1}{\lambda_m}|\psi_m|+\frac{1}{\lambda_m}\|g_m\|T\right)e^{\frac{\|k\|T^2}{2\lambda_m}}\|k^1-k^2\|+$$

$$\int_0^t \left|A_m^1(\tau)-A_m^2(\tau)\right|k_1(\tau)\,d\tau).$$

Теперь применив лемму Гроноулла к этому неравенству получим оценку (18). Лемма 1 доказана.

Основным результатом данного раздела является следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть* $k(t)\in C[0,T]$, $\quad g_m(t)\in C[0,T]$, $\quad$ *выполнены условия*

$$\sum_{m=1}^{\infty}\lambda_m^j|\varphi_m|<\infty,\ j=0,1,2,\ \sum_{m=1}^{\infty}\lambda_m^j|\psi_m|<\infty, j=0,1,$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\lambda_m^j\|g_m\|<\infty, j=0,1. \tag{23}$$

а также

$$\varphi|_{x\in\partial\Omega}=\psi|_{x\in\partial\Omega}=0. \tag{24}$$

Тогда существует единственное классическое решение задачи (1)-(3).

Доказательство. Продифференцировав (формально) ряд (7) по x и t получим ряды:

$$u_{tt}(x,t)=\sum_{m=1}^{\infty}A_m''(t)v_m(x), \tag{25}$$

$$Lu(x,t)=\sum_{m=1}^{\infty}A_m(t)Lv_m(x)=-\sum_{m=1}^{\infty}\lambda_m^2A_m(t)v_m(x). \tag{26}$$

Докажем сходимость рядов (7),(25)–(26).

Из (7) следует,

$$|u(x,t)|=\left|\sum_{m=1}^{\infty}A_m(t)v_m(x)\right|\leq\sum_{m=1}^{\infty}|A_m(t)||v_m(x)|\leq\sum_{m=1}^{\infty}|A_m(t)|.$$

Отсюда, используя оценку (16) получим

$$|u(x,t)|\leq\sum_{m=1}^{\infty}\left(|\varphi_m|+\frac{1}{\lambda_m}|\psi_m|+\frac{1}{\lambda_m}\|g_m\|T\right)e^{\frac{\|k\|T^2}{2\lambda_m}}$$

$$\leq e^{\frac{\|k\|T^2}{2\lambda_1}}\left(\sum_{m=1}^{\infty}|\varphi_m|+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_m}|\psi_m|+T\sum_{m=1}^{\infty}\|g_m\|\right)$$

Все ряды находящиеся в скобке последней строки, сходятся по условиям (23), (24) теоремы, поэтому, ряд $\sum\limits_{m=1}^{\infty} A_m(t)v_m(x)$ сходится абсолютно и равномерно, так как он мажорируется сходящимся числовым рядом.

Для доказательства сходимости ряда (25) воспользуемся оценкой (18)

$$|u_{tt}(x,t)| = \left|\sum_{m=1}^{\infty} A''_m(t)v_m(x)\right| \leq \sum_{m=1}^{\infty} |A''_m(t)||v_m(x)| \leq$$

$$\leq \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m^2|\varphi_m| + \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m|\psi_m| + T\sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m\|g_m\| +$$

$$+\|k\|Te^{\frac{\|k\|T^2}{2\lambda_1}}(\sum_{m=1}^{\infty}\left(1+\frac{T}{2}\lambda_m\right)|\varphi_m| + \sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\lambda_m}+\frac{T}{2}\right)|\psi_m| +$$

$$+T\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\lambda_m}+\frac{T}{2}\right)\|g_m\|).$$

Из этого неравенства следует равномерная и абсолютная сходимость ряда (25), так как он мажорируется конечной суммой сходящихся (по условиям теоремы) числовых рядов.

Аналогичным образом доказывается сходимость ряда (26). Таким образом функция $u(x,t)$ определяемая рядом (7) является решением задачи (1)–(3) в Q.

А теперь докажем единственность этого решения. При $\varphi(x) \equiv 0,\ \ \psi(x) \equiv 0$ и $g(x,t) \equiv 0$ получаем тождества $\varphi_m \equiv 0,\ \psi_m \equiv 0,\ \ g_m(t) \equiv 0$. Тогда из формулы (15) следует, что $A_m \equiv 0$, так как A_m является решением однородного уравнения:

$$A_m(t) = \frac{1}{\lambda_m}\int_0^t A_m(\tau)d\tau \int_0^{t-\tau} \sin\lambda_m(t-\tau-s)k(s)ds.$$

Подставаляя $A_m \equiv 0$ в равенство (8) получим

$$\int_\Omega u(x,t)v_m(x)dx = 0.$$

Поскольку система v_m полна в пространстве $L_2(\Omega)$, функция $u(x,t) = 0$ почти всюду в Ω и при любом $t \in [0,T]$. Так как функция $u(x,t) \in C^1(\overline{Q})$ заключаем, что $u(x,t) \equiv 0$ на Q.

Замечание 1. На самом деле для сходимости рядов (23), налагаются некоторые условия гладкости и согласования на данные задачи (1)-(3). Такие условия, для $n = 1$, обсуждаются в разделе 5.

§ 3. Теорема о разрешимости обратной задачи

В дальнейших исследованиях воспользуемся следующей записью формулы (15):

$$A_m(t) - (R_m A_m)(t) = \Phi_m(t), \tag{27}$$

где введены обозначения:

$$\Phi_m(t) = \varphi_m \cos \lambda_m t + \frac{1}{\lambda_m} \psi_m \sin \lambda_m t + \frac{1}{\lambda_m} \int_0^t \sin \lambda_m (t-s) g_m(s) ds,$$

$$(R_m A_m)(t) = \frac{1}{\lambda_m} \int_0^t r_m(t-\theta) A_m(\theta) d\theta,$$

$$r_m(t) = \int_0^t \sin \lambda_m (t-s) k(s) ds.$$

Если воспользоваться формулой (7), то дополнительное условие (4) принимает вид

$$\sum_{m=1}^{\infty} A_m(t) v_m(x_0) = h(t). \tag{28}$$

Теперь в формуле (28) подставляя вместо $A_m(t)$ выражение найденное из (27), получим интегральное уравнение Вольтерра первого рода

$$\int_0^t k(s) M[k](t-s) ds = f(t), \tag{29}$$

где

$$M[k](t) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_m} v_m(x_0) \int_0^t A_m(\theta) \sin \lambda_m (t-\theta) d\theta,$$

$$f(t) = h(t) - \sum_{m=1}^{\infty} \Phi_m(t) v_m(x_0).$$

Уравнение (29) перепишем в удобном для исследования виде

$$h(t) = \int_0^t k(s) M[k](t-s) ds + F(t), \tag{30}$$

где $F(t) := \sum\limits_{m=1}^{\infty} \Phi_m(t) v_m(x_0)$.

Из (30) следует,

$$h(0) = \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_m v_m(x_0) = \varphi(x_0).$$

Для получения интегрального уравнения Вольтерра второго рода относительно функции $k(t)$, продифференцируем уравнение (30) три раза

$$h'(t) = \int_0^t k(s)M'[k](t-s)ds + F'(t),$$

где

$$M'[k](t) = \sum_{m=1}^{\infty} v_m(x_0) \int_0^t A_m(\theta)\cos\lambda_m(t-\theta)d\theta,$$

следовательно,

$$h'(0) = \sum_{m=1}^{\infty} \psi_m v_m(x_0) = \psi(x_0). \tag{31}$$

$$h''(t) = \int_0^t k(s)M''[k](t-s)ds + F''(t), \tag{32}$$

где

$$M''[k](t) = \sum_{m=1}^{\infty} v_m(x_0)A_m(t) - \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m v_m(x_0) \int_0^t A_m(\theta)\sin\lambda_m(t-\theta)d\theta$$

$$= h(t) - \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m v_m(x_0) \int_0^t A_m(\theta)\sin\lambda_m(t-\theta)d\theta.$$

Из (32) следует

$$h''(0) = \sum_{m=1}^{\infty} \left(g_m(0) - \lambda_m^2\varphi_m\right) v_m(x_0). \tag{33}$$

Далее,

$$h'''(t) = k(t)\sum_{m=1}^{\infty} v_m(x_0)\varphi_m + \int_0^t k(s)M'''[k](t-s)ds + F'''(t),$$

где

$$M'''[k](t) = h'(t) - \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m^2 v_m(x_0) \int_0^t A_m(\theta)\cos\lambda_m(t-\theta)d\theta.$$

Из формулы (33) мы получим интегральное уравнение относительно функции $k(t)$:

$$k(t) = \frac{1}{h(0)}\left[h'''(t) - F'''(t) - \int_0^t k(s)M'''[k](t-s)ds\right], \quad t \in [0,T] \tag{34}$$

Теорема 2. *Пусть* $h(t) \in C^3[0,T], \quad g_m(t) \in C^1[0,T], h(0) \neq 0$ *выполнены условия*

$$\sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m^j |\varphi_m| < \infty, \; j = 0,1,2,3, \; \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m^j |\psi_m| < \infty, j = 0,1,2,$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m^j \|g_m\| < \infty, j = 0,1,2,$$

и, кроме того, выполнены условия (31)–(33). Тогда существует единственное решение обратной задачи $(1)-(4)$ *удовлетворяющее уравнению (34).*

Доказательство. Уравнение (34) представим в виде операторного уравнения

$$k = Bk. \tag{35}$$

Оператор B имеет вид:

$$Bk = k_0 - \frac{1}{h(0)} \int_0^t M'''[k](t-\tau)k(\tau)d\tau$$

где $k_0 = \frac{1}{h(0)} \left[h'''(t) - F'''(t)\right].$

Обозначим через C_σ банахово пространство непрерывных функций, порожденных семейством весовых норм

$$||k||_\sigma = \{\max_{t\in[0,T]} |k(t)e^{-\sigma t}|\}, \sigma \geq 0.$$

Очевидно, что при $\sigma = 0$ данное пространство совпадает с пространством непрерывных функций с обычной нормой. Эту норму будем обозначать далее $\|k\|$. В силу неравенства

$$e^{-\sigma t}\|k\| \leq \|k\|_\sigma \leq \|k\|,$$

нормы $\|k\|_\sigma$ и $\|k\|$ эквивалентны для любого фиксированного $T \in (0,\infty)$. Число σ выберем позже. Пусть $P_\sigma(k_0, \|k_0\|) := \{k \in C_\sigma : \|k - k_0\|_\sigma \leq \|k_0\|\}$ - шар радиуса $\|k_0\|$ с центром в точке k_0 некоторого весового пространства $C_\sigma(\sigma \geq 0)$.

Нетрудно заметить, что для $k \in P_\sigma(k_0, \|k_0\|)$ имеет место оценка

$$\|k\|_\sigma \leq \|k_0\|_\sigma + \|k_0\| \leq 2\|k_0\|.$$

Пусть $k(t) \in P_\sigma(k_0, \|k_0\|)$. Покажем, что при подходящем выборе $\sigma > 0$ оператор B переводит шар в шар, т.е. $B \in P_\sigma(k_0, \|k_0\|)$.

Проверим выполнения условий теоремы Банаха о неподвижной точке [26].

$$|Bk-k_0| = \max_{t\in[0,T]} |(Bk-k_0)e^{-\sigma t}| =$$

$$\max_{t\in[0,T]} \left| \frac{1}{h(0)} \int_0^t M'''[k](t-\tau)k(\tau)e^{-\sigma\tau}e^{-\sigma(t-\tau)}d\tau \right|$$

$$\leq \frac{2T}{|h(0)|}\left[\|h'\|+T\sum_{m=1}^{\infty}\lambda_m v_m(x_0)\left(|\varphi_m|+\frac{1}{\lambda_m}|\psi_m|+\frac{1}{\lambda_m}\|g_m\|T\right)e^{\frac{\|k\|T^2}{2\lambda_m}}\right]\frac{\|k_0\|}{\sigma} =$$

$$= \frac{\|k_0\|}{\sigma}\alpha_0,$$

Выбирая

$$\sigma \geq \alpha_0$$

получим, что B переводит $P_\sigma(k_0, \|k_0\|)$ в $P_\sigma(k_0, \|k_0\|)$.

Теперь проверим выполнение второго условия:

$$||(Bk^1-Bk^2)||_\sigma = \max_{t\in[0,T]} |(Bk^1-Bk^2)e^{-\sigma t}|$$

$$= \max_{t\in[0,T]} \left| \frac{1}{h(0)} \int_0^t \Big[M'''[k^1](t-\tau)k^1(\tau) - M'''[k^2](t-\tau)k^2(\tau)\Big]e^{-\sigma\tau}e^{-\sigma(t-\tau)}d\tau \right|$$

$$\leq \max_{t\in[0,T]} \frac{1}{|h(0)|}\int_0^t \left| \left[h'(t-\tau) - \int_0^t \sum_{m=1}^{\infty}\lambda_m^2 v_m(x_0)A_m^1(\alpha-\tau)\cos\lambda_m(t-\alpha)d\alpha\right]k^1(\tau)\right.$$

$$\left. - \left[h'(t-\tau) - \int_0^t \sum_{m=1}^{\infty}\lambda_m^2 v_m(x_0)A_m^2(\alpha-\tau)\cos\lambda_m(t-\alpha)d\alpha\right]k^2(\tau)e^{-\sigma\tau}e^{-\sigma(t-\tau)}\right| d\tau$$

$$\leq \max_{t\in[0,T]} \frac{1}{|h(0)|}\int_0^t (\big|h'(t-\tau)\big|\big|k^1(\tau)-k^2(\tau)\big|e^{-\sigma\tau}e^{-\sigma(t-\tau)} + \int_0^t$$

$$\sum_{m=1}^{\infty}\lambda_m^2 v_m(x_0)|\cos\lambda_m(t-\alpha)(A_m^1(\alpha-\tau)k^1(\tau)-A_m^2(\alpha-\tau)k^2(\tau))|e^{-\sigma\tau}e^{-\sigma(t-\tau)}d\alpha)d\tau. \tag{36}$$

Первое слагаемое в правой части (36), оценивается следующим образом:

$$\max_{t\in[0,T]} \frac{1}{|h(0)|}\int_0^t \Big[\big|h'(t-\tau)\big|\big|k^1(\tau)-k^2(\tau)\big|e^{-\sigma\tau}e^{-\sigma(t-\tau)}\Big]d\tau \leq \frac{\|h'\|T}{|h(0)|}\cdot\frac{\|k^1-k^2\|}{\sigma}. \tag{37}$$

Для оценки второго слагаемого еще раз обратимся к неравенству (20). Тогда, мы имеем

$$\max_{t\in[0,T]} \frac{1}{|h(0)|}\int_0^t\int_0^t$$

$$\left[\sum_{m=1}^{\infty}\lambda_m^2 v_m(x_0)\Big|\cos\lambda_m(t-\alpha)\big[A_m^1(\alpha-\tau)k^1(\tau)-A_m^2(\alpha-\tau)k^2(\tau)\big]\Big|e^{-\sigma\tau}e^{-\sigma(t-\tau)}d\alpha\right]d\tau$$

$$\leq \max_{t\in[0,T]}\frac{1}{|h(0)|}\int_0^t\int_0^t\left[\sum_{m=1}^{\infty}\lambda_m^2 v_m(x_0)\big|\cos\lambda_m(t-\alpha)\big|\Big[\big|A_m^1(\alpha-\tau)-A_m^2(\alpha-\tau)\big|\,\big|k^1(\tau)\big|\right.$$

$$\left.+\big|A_m^2(\alpha-\tau)\big|\,\big|k^1(\tau)-k^2(\tau)\big|\Big]e^{-\sigma\tau}e^{-\sigma(t-\tau)}d\alpha\right]d\tau$$

$$\leq \frac{T^2}{|h(0)|}\sum_{m=1}^{\infty}\lambda_m^2 v_m(x_0)\left[T^2\|k_0\|e^{\int\limits_0^t|k_1(\theta)|d\theta}+1\right]\left(\|\varphi_m\|+\frac{1}{\lambda_m}\|f_m\|T\right)e^{\frac{\|k\|T^2}{2\lambda_1}}\frac{\|k^1-k^2\|}{\sigma}. \tag{38}$$

Здесь мы воспользовались оценками (16) и (18). Подставляя (37) и (38) в (36) получим

$$||(Bk^1-Bk^2)||_\sigma=\max_{t\in[0,T]}\left|(Bk^1-Bk^2)e^{-\sigma t}\right|$$

$$\leq\frac{T}{|h(0)|}\left[\|h'\|+T\sum_{m=1}^{\infty}\lambda_m^2 v_m(x_0)\left[T^2\|k_0\|e^{\int\limits_0^t|k_1(\theta)|d\theta}+1\right]\left(|\varphi_m|+\frac{1}{\lambda_m}\|f_m\|T\right)e^{\frac{\|k\|T^2}{2\lambda_1}}\right]$$

$$\frac{\|k^1-k^2\|}{\sigma}=:\frac{\alpha_1}{\sigma}\|k^1-k^2\|.$$

Как следует из полученных оценок, если число σ выбрать из условия $\sigma>\max\{\alpha_0,\alpha_1\}$, то оператор B является сжимающим на $P_\sigma(k_0,\|k_0\|)$. Тогда, согласно принципу Банаха, уравнение (35) имеет и притом единственное решение в $P_\sigma(k_0,\|k_0\|)$ при любом фиксированном $T>0$ ([27], с. 84). Теорема 2 доказана.

§ 4. Оценка условной устойчивости

Пусть $K(k^0)$ - множество функций $k(t)\in C[0,T]$, удовлетворяющих для $t\in[0,T]$ неравенству $\|k(t)\|_{C[0,T]}\leq k^0$ с фиксированной положительной постоянной k^0. Эта постоянная определена в (40).

Теорема 3. *Пусть выполнены условия теоремы 2 и пусть k_1 и k_2 два решения обратной задачи (1)–(4), соответствующие двум наборам данных $\{\varphi^1,\psi^1,g^1,h^1\}$ и $\{\varphi^2,\psi^2,g^2,h^2\}$. Тогда имеет место следующая оценка устойчивости:*

$$\|k^1-k^2\|_{C[0,T]}\leq$$

$$C(\max\left\{\max_{0\leq j\leq3}\sum_{m=1}^{\infty}\lambda_m^j|\widetilde{\varphi}_m|,\max_{0\leq j\leq2}\sum_{m=1}^{\infty}\lambda_m^j|\widetilde{\psi}_m|,\max_{0\leq j\leq2}\sum_{m=1}^{\infty}\lambda_m^j\|\widetilde{g}_m\|_{C^1[0,T]}\right\}+$$

$$+\|\widetilde{h}\|_{C^3[0,T]}), \tag{39}$$

где $C = C(k^0, T)-$ *некоторая положительная постоянная.*

Доказательство. Так как условия теоремы 2. выполнены, то решение уравнения (35) принадлежит множеству $P_\sigma(k_0, \|k_0\|)$ и

$$\max_{t\in[0,T]} |k(t)| \leq 2\|k_0\| := k^0. \tag{40}$$

Пусть $\phi^j,\ j = 1,2$ - вектор функций, которые являются решениями (40) с набором данных $\left\{\varphi^j(x), \psi^j(x), g^j(x,t), h^j(t)\right\},\ j = 1,2$, соответственно, т.е. справедливы уравнения $\phi^j = A\phi^j$ для $j = 1,2$. Известные функции $\varphi^j(x), \psi^j(x),\ j = 1,2$ входят в свободные члены этих интегральных уравнений соответствующим образом через сложные функции $M^j[k(t)],\ j = 1,2$. В дальнейшим будем обозначать разность двух функций, наименование которых отличается только цифрой сверху той же самой буквой со знаком $\sim$, как в работе [17]. Например $\widetilde{u} = u^1 - u^2$, $\widetilde{h} = h^1 - h^2$ и т.д. Тогда из (34) получим уравнение относительно функции $\widetilde{k}(t)$:

$$\widetilde{k}(t) = \frac{1}{h(0)}\left[\widetilde{h}'''(t) - \widetilde{F}'''(t) - \int_0^t \left[k^1(s)\widetilde{M}'''[k](t-s) + \widetilde{k}(s)M^{2'''}[k](t-s)\right] ds\right],$$

$$t \in [0,T],$$

где

$$\widetilde{M}'''[k](t) = \widetilde{h}'(t) - \sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m^2 v_m(x_0) \int_0^t \widetilde{A}_m(\theta) \cos\lambda_m(t-\theta) d\theta.$$

Заметим, что входящие в это уравнение функции могут быть оценены на основе априорной информации о данных задачи. Используя эту априорную информацию, применив неравенство Гронуолла получим оценку (39) .

Теорема 3 доказана.

§ 5. Частный случай

Рассмотрим частный случай задачи (1)–(4), когда $n = 1$. При этом будем предполагать $a_{11}(x)$ и $c(x)$ постоянными ($a_{11}(x) \equiv 1,\ c(x) \equiv 0$.) Тогда в области $Q = \{(x,t) : 0 < x < l,\ 0 < t \leq T.\}$ мы имеем следующую задачу:

$$u_{tt} - u_{xx} = \int_0^t k(t-\theta)u(x,\theta)\, d\theta + g(x,t), \quad (x,t) \in Q, \tag{41}$$

с начальными

$$u|_{t=0} = \varphi(x), \quad u_t|_{t=0} = \psi(x), \quad 0 < x < l, \tag{42}$$

и граничными условиями:

$$u(0,t) = 0, \qquad u(l,t) = 0, \quad t > 0, \tag{43}$$

где $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и $g(x,t)$– заданные функции.

В обратной задаче требуется найти функцию $k(t)$, если относительно решения прямой задачи (1)–(3) имеется дополнительная информация:

$$u(x_0,t) = h(t), \qquad 0 \le t \le T, \tag{44}$$

где $h(t)$– заданная функция, $x_0 \in (0,l)$–заданная число.

Известно, что в данном случае собственные функции и соответствующие собственные значения этой задачи ([28], с. 85) имеют вид:

$$v_m(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \lambda_m x, \quad \lambda_m = \frac{\pi m}{l}, \quad m \in N.$$

Решение задачи (41)–(43) будем искать в виде ряда Фурье

$$u(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} A_m(t) v_m(x), \tag{45}$$

где $A_m(t)$– коэффициенты Фурье определяемые формулой
$A_m(t) = (u(x,t), v_m(x))$.

В данном случае, предполагая условия гладкости и согласования для заданных функций, мы можем обеспечить выполнения условий (23):

$$u_{tt}(x,t) = \sum_{m=1}^{\infty} A''_m(t) v_m(x), \tag{46}$$

$$u_{xx}(x,t) = -\sum_{m=1}^{\infty} \lambda_m^2 A_m(t) v_m(x). \tag{47}$$

Для функционального ряда (45) находим мажорантный ряд

$$|u(x,t)| \le C_1 \sum_{m=1}^{\infty} \left(|\varphi_m| + \frac{|\psi_m|}{\lambda_m} + \frac{\|g_m\|}{\lambda_m} \right), \tag{50}$$

где C_1- постоянная, которая зависит только от T. Используя оценки (16) и (17) для рядов (46) и (47) получим следующие неравенства:

$$|u_{tt}(x,t)| \le C_2 \sum_{m=1}^{\infty} \left(\lambda_m^2|\varphi_m| + \lambda_m|\psi_m| + \lambda_m\|g_m\|\right), \tag{49}$$

$$|u_{xx}(x,t)| \le C_3 \sum_{m=1}^{\infty} \left(\lambda_m^2|\varphi_m| + \lambda_m|\psi_m| + \lambda_m\|g_m\|\right). \tag{50}$$

где C_2 и C_3 некоторые положительные постоянные, зависящие только от T. Из формул (48)–(50) следует, что, ряды (45)-(47) при любых $(x,t) \in \overline{Q}$ мажорируются рядом

$$C_4 \sum_{m=1}^{\infty} \left(m^2|\varphi_m| + m|\psi_m| + m\|g_m\|\right). \tag{51}$$

где C_4- постоянная, которая зависит только от T.

Пусть выполнены следующие условия:

$$\varphi(x) \in C^2[0,l], \quad \varphi^{(3)}(x) \in L_2(0,l), \quad \psi(x) \in C^1[0,l], \quad \psi^{(2)}(x) \in L_2(0,l),$$
$$g(\cdot,t) \in C^1[0,l], \quad g_{xx}(\cdot,t) \in L_2(0,l), \quad t \in [0,T],$$
$$\varphi(0) = \varphi(l) = \varphi^{(2)}(0) = \varphi^{(2)}(l) = 0, \quad \psi(0) = \psi(l) = 0, \quad g(0,t) = g(l,t) = 0. \tag{52}$$

Тогда, ряды (45)-(47) в силу условий (52) на функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и $g(x,t)$ оцениваются сходящимся числовым рядом

$$C_5 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m} \left(|\varphi_m^{(3)}| + |\psi_m^{(2)}| + \|g_m^{(2)}\|\right), \tag{53}$$

где C_5- некоторая положительная постояннная, зависящая только от T; $\varphi_m^{(3)}$, $\psi_m^{(2)}$, $g_m^{(2)}(t)-$ коэффициенты разложения функций $\varphi'''(x)$, $\psi''(x)$ $g_{xx}(x,t)$, в ряд Фурье относительно системы функций $\left\{\frac{1}{\sqrt{2l}}, \sqrt{\frac{2}{l}}\cos\lambda_m x\right\}$, $m \ge 1$,

$$\varphi_m^{(3)} = \int_0^l \varphi^{(3)}(x) v_m(x)dx, \quad \psi_m^{(2)} = \int_0^l \psi^{(2)}(x) v_m(x)dx,$$

$$g_m^{(2)}(t) = \int_0^l g_x^{(2)}(x,t) v_m(x)dx,$$

такие, что

$$\sum_{m=1}^{\infty} |\varphi_m^{(3)}|^2 \le \int_0^l |\varphi^{(3)}(x)|^2 dx, \quad \sum_{m=1}^{\infty} |\psi_m^{(2)}|^2 \le \int_0^l |\psi^{(2)}(x)|^2 dx,$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} |g_m^{(2)}|^2 \leq \int_0^l |g_m^{(2)}(x,t)|^2 dx.$$

Следовательно, равномерно будут сходиться ряды (47) – (49). Единственность этого решения устанавливается стандартным приемам (как в раздела 3).

Таким образом, мы доказали следующую теорему:

Теорема 4. *Пусть $k(t) \in C[0,T]$ и выполнены условия (52). Тогда существует единственное классическое решение задачи (41)-(43).*

Следует отметить, что для данного частного случая также, можно сформулировать теорему о глобальной однозначной разрешимости обратной задачи (41)–(44). Доказательство которой следует из доказательства теоремы 2.

Список литературы

1. *Hasanov A.H., Romanov V.G. Introduction to Inverse Problems for Differential Equations.* Springer Nature Switzerland, 2017.

2. *Романов В.Г. обратные задачи математической физики.* Москва: Наука, 1984.

3. *Романов В.Г. Устойчивость в обратных задачах.* Москва: Наука, 2005.

4. *Kirsch A. An Introduction to the Mathematical Theory of Inverse Problems.* Springer Nature Switzerland, 2021. DOI:10.1007/978-3-030-63343-1

5. *Lesnic D. Inverse Problems with Applications in Science and Engineering.* Leeds: Chapman and Hall, 2022. DOI: 10.1201/9780429400629.

6. *Кабанихин С.И. Обратные и некорректные задачи.* Новосибирск: Сибирское научное изд-во, 2009.

7. *Lorenzi A., and Sinestrari E.* Stability results for a partial integrodifferential inverse problem // *Pitman Research Notes Math.* 1989. V. 190, P. 271–294.

8. *Lorenzi A., and Paparoni E.* Direct and inverse problems in the theory of materials with memory // Ren. Sem. Math. Univ1992. N 87. P. 105 – 138.

9. *Lorenzi A.* An identification problem related to a nonlinear hyperbolic integro-differential equation // *Nonlinear NonlinearAnalysis: Theory, Methods & Applications.* 1994. V. 22, N 1 . P. 21–44. Zbl 0818.93014.

10. *Safarov Z. S., and Durdiev D. K.* Inverse Problem for an Integro-Differential Equation of Acoustics // *Differential Equations.* 1971. V. 54, N 1 . P. 134-142.

11. *Safarov J. Sh.* Global solvability of the one-dimensional inverse problem for the integro-differential equation of acoustics// *J. Sib. Fed. Univ. Math Phys.* 2018. V. 11, N 6 . P. 753–763. DOI: https://doi.org/10.17516/1997-1397-2018-11-6-753-763

12. *Romanov V.G.* On the determination of the coefficients in the viscoelasticity equations // *Siberian Math. J.* 2014. V. 55, N 3 . P. 503–510.

13. *Дурдиев Д. К., Сафаров Ж. Ш.* Обратная задача об определении одномерного ядра уравнения вязкоупругости в ограниченной области // *Матем. заметки.* 2015. Т. 97 , № 6 . С. 855–867.

14. *Рахмонов А. А., Дурдиев У. Д., Бозоров З.Р.* Задача определения скорости звука и функции памяти анизотропной среды // *ТМФ.* 2021. Т. 207, № 1. С. 112–132.

15. *Guidetti D.* Reconstruction of a convolution kernel in a parabolic problem with a memory term in the boundary conditions // *Bruno Pini Mathematical Analysis Seminar.* 2013. V. 4, N 1 . P. 47–55. https://doi.org/10.6092/issn.2240-2829/4154

16. *Cavaterra C., Guidetti D.* Identification of a convolution kernel in a control problem for the heat equation with a boundary memory term//*Annali di Matematica* 2014. V. 193. P. 779–816. DOI 10.1007/s10231-012-0301-y

17. *Janno J., Von Wolfersdorf L.* Inverse problems for identification of memory kernels in viscoelasticity // *Mathematical methods in the applied sciences.* 1997. V. 20, N 4 . P. 291–314.

18. *Дурдиев Д.К., Рахмонов А.А.* Задача об определении двумерного ядра в системе интегро-дифференциальных уравнений вязкоупругой пористой среды // *Сиб. журн. индустр. матем.* 2020. V. 23, N 2 . P. 63—80.

ISSN 1560-750X
Математические труды, 2024, Том 27, № 1, С.139-162
Mat. trudy, 2024, vol. 27, no. 1, pp. 139-162

19. *Durdiev D. K., Totieva Zh. D.* Determination of non-stationary potential analytical with respect to spatial variables // *Журн. СФУ. Сер. Матем. и физ.* 2022. V. 15, N 5 . P. 565–576.

20. *Safarov J. Sh.* Two-dimensional Inverse Problem for an Integro-differential Equation of Hyperbolic Type // *Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics.* 2022. V. 15, N 5 . P. 651–662. DOI: 10.17516/1997-1397-2022-15-5-651-662

21. *Дурдиев Д. К., Сафаров Ж. Ш.* Задача об определении двумерного ядра уравнения вязкоупругости со слабо горизонтальной неоднородностью // *Сиб. журн. индустр. матем.* 2019. V. 25, N 1 . P. 26–32.

22. *Дурдиев Д. К., Сафаров Ж. Ш.* Задача определения памяти среды со слабо горизонтальной неоднородностью // *Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компью-терные науки.* 2022. V. 32, N 3 . P. 383–402. DOI: 10.35634/vm220303

23. *Дурдиев Д. К., Тотиева Ж. Д.* О глобальной разрешимости одной многомерной обратной задачи для уравнения с памятью // *Сиб. матем. журн.* 2021. V. 62, N 2 . P. 269–285.

24. *Janno J., Von Wolfersdorf L.* Inverse problems for identification of memory kernels in heat flow // *J.Inv. Ill-PosedProblems.* 1996. V. 4, N 1 . P. 39–66.

25. *В.С.Владимиров* Уравнения математической физики. Москва, Наука, 1988. 512 с.

26. *Ильин В.А.* О разрешимости смешанных задач для гиперболического и параболического уравнений // *Успехи мат. наук.* 1960. V. 15, N 2 . P. 97–154. http://mi.mathnet.ru/umn6720, Russian Math. Surveys, 15:1 (1960), 85–142

27. *Колмогоров А.Н, Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа.* Москва: Наука, 1976.

28. *Тихонов А.Н, Самарский А.А. Уравнения математической физики.* Москва: Наука, 1977.

References

1. *Hasanov A.H., Romanov V.G. Introduction to Inverse Problems for Differential Equations.* Springer Nature Switzerland, 2017.

ISSN 1560-750X
Математические труды, 2024, Том 27, № 1, С.139-162
Mat. trudy, 2024, vol. 27, no. 1, pp. 139-162

2. *Romanov V.G. Inverse problems of mathematical physics.* Moscow: Nauka, 1984.

3. *Romanov V.G. Stability in inverse problems.* Moscow: Nauka, 2005.

4. *Kirsch A. An Introduction to the Mathematical Theory of Inverse Problems.* Springer Nature Switzerland, 2021. DOI:10.1007/978-3-030-63343-1

5. *Lesnic D. Inverse Problems with Applications in Science and Engineering.* Leeds: Chapman and Hall, 2022. DOI: 10.1201/9780429400629.

6. *Kabanikhin S.I. Inverse and ill-posed problems.* Novosibirsk: Siberian Scientific Publishing House, 2009.

7. *Lorenzi A., and Sinestrari E.* Stability results for a partial integrodifferential inverse problem // *Pitman Research Notes Math.* 1989. V. 190, P. 271–294.

8. *Lorenzi A., and Paparoni E.* Direct and inverse problems in the theory of materials with memory // Ren. Sem. Math. Univ1992. N 87. P. 105 – 138.

9. *Lorenzi A.* An identification problem related to a nonlinear hyperbolic integro-differential equation // *Nonlinear NonlinearAnalysis: Theory, Methods & Applications.* 1994. V. 22, N 1 . P. 21–44. Zbl 0818.93014.

10. *Safarov Z. S., and Durdiev D. K.* Inverse Problem for an Integro-Differential Equation of Acoustics // *Differential Equations.* 1971. V. 54, N 1 . P. 134-142.

11. *Safarov J. Sh.* Global solvability of the one-dimensional inverse problem for the integro-differential equation of acoustics// *J. Sib. Fed. Univ. Math Phys.* 2018. V. 11, N 6 . P. 753–763. DOI: https://doi.org/10.17516/1997-1397-2018-11-6-753-763

12. *Romanov V.G.* On the determination of the coefficients in the viscoelasticity equations // *Siberian Math. J.* 2014. V. 55, N 3 . P. 503–510.

13. *Durdiev D. K., Safarov J. Sh.* Inverse problem of determining the one-dimensional kernel of the viscoelasticity equation in a bounded domain // *Mat. Zametki.* 2015. T. 97 , № 6 . C. 855–867.

14. *Rahmonov A. A., Durdiev U. D., Bozorov Z. R.* Problem of determining the speed of sound and the memory of an anisotropic medium // *Teor. Mat. Fiz.* 2021. T. 207, № 1. C. 112–132.

15. *Guidetti D.* Reconstruction of a convolution kernel in a parabolic problem with a memory term in the boundary conditions // *Bruno Pini Mathematical Analysis Seminar.* 2013. V. 4, N 1 . P. 47–55. https://doi.org/10.6092/issn.2240-2829/4154

16. *Cavaterra C., Guidetti D.* Identification of a convolution kernel in a control problem for the heat equation with a boundary memory term // *Annali di Matematica.* 2014. V. 193, P. 779–816. DOI 10.1007/s10231-012-0301-y

17. *Janno J., Von Wolfersdorf L.* Inverse problems for identification of memory kernels in viscoelasticity // *Mathematical methods in the applied sciences.* 1997. V. 20, N 4 . P. 291–314.

18. *Durdiev, D. K., Rahmonov, A. A.* The problem of determining the 2D-kernel in a system of integro-differential equations of a viscoelastic porous medium. // *Sib. Zh. Ind. Mat.* 2020. V. 23, N 2 . P. 63—80.

19. *Durdiev D. K., Totieva Zh. D.* Determination of non-stationary potential analytical with respect to spatial variables // *Zhurn. SFU. Ser. Mat. i Fiz.* 2022. V. 15, N 5 . P. 565–576.

20. *Safarov J. Sh.* Two-dimensional Inverse Problem for an Integro-differential Equation of Hyperbolic Type // *Journal of Siberian Federal University. Mathematics and Physics.* 2022. V. 15, N 5 . P. 651–662. DOI: 10.17516/1997-1397-2022-15-5-651-662

21. *Durdiev D. K., Rahmonov A. A.* A 2D kernel determination problem in a visco-elastic porous medium with a weakly horizontally inhomogeneity// *Sib. Zh. Ind. Mat.* 2019. V. 25, N 1 . P. 26–32.

22. *Durdiev D. K., Safarov J. Sh.* The problem of determining the memory of a medium with weakly horizontal heterogeneity // *Vestn. Udm. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki* 2022. V. 32, N 3 . P. 383–402. DOI: 10.35634/vm220303

23. *Durdiev, D. K.; Totieva, Zh. D.* About global solvability of a multidimensional inverse problem for an equation with memory // *Sib. Mat. Zh.* 2021. V. 62, N 2 . P. 269–285.

ISSN 1560-750X
Математические труды, 2024, Том 27, № 1, С.139-162
Mat. trudy, 2024, vol. 27, no. 1, pp. 139-162

24. *Janno J., Von Wolfersdorf L.* Inverse problems for identification of memory kernels in heat flow // *J.Inv. Ill-PosedProblems.* 1996. V. 4, N 1 . P. 39–66.

25. *V.S.Vladimirov Equations of mathematical physics* Moskva: Nauka, 1988.

26. *Ильин В.А.* О разрешимости смешанных задач для гиперболического и параболического уравнений // *Успехи мат. наук.* 1960. V. 15, N 2 . P. 97–154. http://mi.mathnet.ru/umn6720, Russian Math. Surveys, 15:1 (1960), 85–142.

27. *Колмогоров А.Н, Фомин С.В. Elements of function theory and functional analysis.* Moskva: Nauka, 1976.

28. *Тихонов А.Н, Самарский А.А. Equations of mathematical physics.* Moskva: Nauka, 1977.

Информация об авторах

Журабек Шакарович Сафаров, доктор физико-математических наук, доцент

SPIN 4963-4233, AuthorID 819591
Scopus Author ID 56703174300

Дурдимурод Каландарович Дурдиев, доктор физико-математических наук, профессор

AuthorID 562837
Scopus Author ID 16411517300
https://orcid.org/0000-0002-6054-2827

Аскар Ахмадович Рахмонов, кандидат физико-математических наук

Scopus Author ID 57202852322

Author information

Jurabek Sh. Safarov, Doctor of Mathematics
Associate Professor

SPIN 4963-4233, AuthorID 819591
Scopus Author ID 56703174300

Durdimurod K. Durdiev, Doctor of Mathematics
Professor

AuthorID 562837

Scopus Author ID 16411517300
https://orcid.org/0000-0002-6054-2827

Askar A. Rahmonov, Candidate of Mathematics
Scopus Author ID 57202852322

Статья поступила в редакцию 18.01.2023 ;
одобрена после рецензирования 08.04.2024; принята к публикации 17.05.2024

The article was submitted 18.01.2023;
approved after reviewing 08.04.2024; accepted for publication 17.05.202